Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 60

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

5 de septiembre de 2021

1. Calcular $F^a_{\mu\nu}$.

El tensor de curvatura $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ se define como

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathscr{A}_\nu - \partial_\nu \mathscr{A}_\mu + \mathscr{A}_\mu \mathscr{A}_\nu - \mathscr{A}_\nu \mathscr{A}_\mu \tag{1}$$

Usando que la matriz $\mathscr{A}_\mu$ tiene la forma

$$\mathscr{A}_\mu = -igA^a_\mu T_a \tag{2}$$

Podemos reescribir el tensor de curvatura como

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu(-igA^a_\nu T_a) - \partial_\nu(-igA^a_\mu T_a) + (-igA^a_\mu T_a)(-igA^b_\nu T_b) - (-igA^a_\nu T_a)(-igA^b_\mu T_b) \\
&= -ig\partial_\mu A^a_\nu T_a + ig\partial_\nu A^a_\mu T_a - g^2 A^a_\mu A^b_\nu T_a T_b + g^2 A^b_\nu A^a_\mu T_b T_a \\
&= -ig\left(\partial_\mu A^a_\nu T_a - \partial_\nu A^a_\mu T_a - igA^a_\mu A^b_\nu [T_a, T_b]\right) \\
&= -ig\left(\partial_\mu A^a_\nu T_a - \partial_\nu A^a_\mu T_a - igA^a_\mu A^b_\nu (if_{abc}T_c)\right) \\
&= -ig\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf_{bca}A^b_\mu A^c_\nu\right) T_a
\end{aligned}$$

Por lo que obtenemos la forma deseada

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = -igF^a_{\mu\nu}T_a \tag{3}$$

Con $F^a_{\mu\nu}$ dada por la expresión

$$\boxed{F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu} \tag{4}$$

También podemos repetir el ejercicio pero usando ahora la otra definición de curvatura:

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu - igA^a_\mu T_a, \partial_\nu - igA^b_\nu T_b] = \cancel{[\partial_\mu, \partial_\nu]} - ig[\partial_\mu, A^b_\nu T_b] - ig[A^a_\mu T_a, \partial_\nu] - g^2[A^a_\mu T_a, A^b_\nu T_b] \\
&= -ig[\partial_\mu, A^b_\nu]T_b - ig[A^a_\mu, \partial_\nu]T_a - g^2 A^a_\mu A^b_\nu [T_a, T_b] \\
&= -ig[\partial_\mu, A^c_\nu]T_c + ig[\partial_\nu, A^c_\mu]T_c - ig^2 A^a_\mu A^b_\nu f_{abc} T_c \\
&= -ig\left([\partial_\mu, A^c_\nu] - [\partial_\nu, A^c_\mu] + gA^a_\mu A^b_\nu f_{cab}\right) T_c = -igF^c_{\mu\nu}T_c
\end{aligned} \tag{5}$$

Por lo que obtenemos casi la expresión que queremos, lo único que nos falta por demostrar es $[\partial_\mu, f(x)] = \partial_\mu f(x)$. Para verlo, recordemos que estamos calculando el conmutador de dos operadores, por lo que vamos a aplicarlo a una función arbitraria $g(x)$:

$$[\partial_\mu, f(x)]g(x) = \partial_\mu(f(x)g(x)) - f(x)\partial_\mu(g(x)) = g(x)\partial_\mu f(x) \tag{6}$$

Por lo que en efecto, el resultado es simplemente multiplicar la función por $\partial_\mu f(x)$. Nótese que un caso particular de esta propiedad es el famoso $[\partial, x] = 1$. Por lo que los conmutadores de la ecuación (5) se convierten en:

$$F^c_{\mu\nu} = \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu + gf_{cab}A^a_\mu A^b_\nu \tag{7}$$

Que de nuevo es la expresión que queríamos.